DM n°29

Exercice 1. Mesure de Mahler d'un polynôme. Pour $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré d, de racines $r_1, \dots, r_d$ comptées avec multiplicité, on considère la mesure de Mahler de P :

$$M(P) = |a_d| \prod_{i=1}^d \max(1, |r_i|).$$

I. Calcul d'une intégrale. Soit $r \in \mathbb{R}$, $r \neq \pm 1$ et $I(r) = \int_0^{2\pi} \ln\left(r^2 - 2r\cos t + 1\right) \mathrm{d}t$.

1) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $r^2 - 2r\cos t + 1 > 0$. Cela justifie l'existence de $I(r)$.

2) Par des sommes de Riemann.

a) Montrer que $I(r) = 2\int_0^{\pi} \ln\left(r^2 - 2r\cos t + 1\right) \mathrm{d}t$.

b) Factoriser le polynôme $P = X^{2n} - 1$ sur $\mathbb{C}$, puis en irréductibles sur $\mathbb{R}$.

c) Soit $P_n(r) = \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(1 - 2r\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + r^2\right)$. Déduire de la question précédente une forme simple de $P_n(r)$.

d) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln |P_n(r)|$. Reconnaître une somme de Riemann, en déduire $I(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 1 \\ 4\pi \ln|r| & \text{si } r > 1 \end{cases}$.

3) Par une relation fonctionnelle.

a) Vérifier que $I(r) = 2\int_0^{2\pi} \ln|e^{it} - r| \,\mathrm{d}t$. On pose $J_r = \frac{1}{2\pi} I(r)$.

b) Montrer que pour $r \geqslant 0$, $J(r^2) = 2J(r)$.

c) Montrer que $\dfrac{1}{2^n} \ln\left|r^{2^n} - 1\right| \leqslant \dfrac{J(r^{2^n})}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n} \ln\left|r^{2^n} + 1\right|$.

d) Retrouver l'expression de $I(r)$.

II. Formule de Mahler.

On pose $\widetilde{M}(P) = \exp\left(\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln\left|P(e^{it})\right| \mathrm{d}t\right)$. L'objectif est de démontrer l'identité $M(P) = \widetilde{M}(P)$.

La quantité $\widetilde{M}(P)$ est a priori mal définie si P admet une racine de module 1. Le programme de seconde année permet de lui donner un sens. On ignorera cette difficulté, et on admettra que les résultats établis dans la partie précédente sont toujours valables pour $r = 1$: $I(1) = 0$.

1) Montrer que M et $\widetilde{M}$ sont multiplicatives, c'est-à-dire que pour $Q_1, Q_2 \in \mathbb{C}[X]$, $M(Q_1Q_2) = M(Q_1)M(Q_2)$.

2) On s'intéresse au cas où P est de degré 1 unitaire : $P = X - z$. On note $r = |z|$.

a) Montrer que $\widetilde{M}(X - z) = \widetilde{M}(X - r)$. **b)** Montrer que $M(X - z) = \widetilde{M}(X - z)$.

3) Montrer le résultat annoncé.

III. Encadrements de $M(P)$.

On considère $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. On note $\|P\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^n |a_k|^2}$, $\|P\|_\infty = \max |a_i|$ et $\|P\|_1 = \sum_{k=0}^n |a_k|$.

a) Exprimer $\int_0^1 |P(e^{2i\pi t})|^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{it})|^2 \,\mathrm{d}t$ en fonction de $\|P\|_2$.

b) En utilisant des sommes de Riemann et la convexité de l'exponentielle, montrer l'inégalité de Jensen : pour u continue sur $[0, 1]$, on a

$$\exp\left(\int_0^1 u(t) \,\mathrm{d}t\right) \leqslant \int_0^1 e^{u(t)} \,\mathrm{d}t.$$

c) En utilisant la formule de Mahler, en déduire que $\dfrac{M(P)}{\sqrt{d+1}} \leqslant \|P\|_\infty$.

Exercice 2. Équirépartition modulo 1.

Pour $f\colon [0, 1] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux, on note $\|f\|_\infty = \sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$. On note $E = \mathcal{C}^0_{pm}([0, 1], \mathbb{R})$. On admet que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé, c'est-à-dire que $\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f = \tilde{0}$, que $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \, \|f\|_\infty$ et que $\|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Une suite $A = (a_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ de réels appartenant $[0, 1]$ est dite équirépartie dans $[0, 1]$ si pour toute fonction $f \in E$, on a

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(a_n) = \int_0^1 f(x) \,\mathrm{d}x.$$

Soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle. On pose $\forall n$, $a_n = r_n - \lfloor r_n \rfloor$. La suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est dite équirépartie modulo 1 si la suite des réels $a_n, n \in \mathbb{N}^*$, est équirépartie dans $[0, 1]$.

I. Un critère équivalent d'équirépartition dans $[0, 1]$.

1) Une condition suffisante. Soit $A = (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle à valeurs dans $[0, 1]$. On note F_A l'ensemble des fonctions f de E qui vérifient $\displaystyle\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(a_n) = \int_0^1 f(x) \,\mathrm{d}x$. $(*)$

a) Montrer que F_A est un sous-espace vectoriel de E contenant les fonctions constantes.

b) Soit $g \in E$. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions $f_1, f_2 \in F_A$ vérifiant

(i) $\forall x \in [0,1]$, $f_1(x) \leqslant g(x) \leqslant f_2(x)$,

(ii) $\int_0^1 g(x) - f_1(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon$ et $\int_0^1 f_2(x) - g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon$.

Démontrer que $g \in F_A$.

c) On suppose que F_A est dense dans E pour $\|\cdot\|_\infty$, c'est-à-dire que pour tout $f \in E$, il existe une suite $(f_n) \in F_A^{\mathbb{N}}$ telle que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Montrer que (a_n) est équirépartie dans $[0,1]$.

2) Répartition dans les segments.

Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $[0,1]$. Pour $J = [c,d] \subset [0,1]$ un intervalle, on note $h_J = \mathbb{1}_J$ la fonction égale à 1 sur l'intervalle J et à 0 en dehors.

a) Montrer que la suite (a_n) est équirépartie dans $[0,1]$ si et seulement si pour tout segment $J = [c,d] \subset [0,1]$, la fonction h_J appartient à F_A.

b) Soit $J = [c,d]$ avec $0 < c < d < 1$. Étant donné $\varepsilon > 0$, déterminer deux fonctions continues f_1 et f_2 vérifiant les relations :

(i) $f_1(0) = f_1(1), f_2(0) = f_2(1)$ et $\forall x \in [0,1]$, $f_1(x) \leqslant h_J(x) \leqslant f_2(x)$,

(ii) $\int_0^1 h_J(x) - f_1(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon$ et $\int_0^1 f_2(x) - h_J(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon$

On dessinera en particulier les graphes de deux telles fonctions f_1 et f_2.

On admet que ce résultat reste valable pour n'importe quel intervalle J de $[0,1]$.

c) En déduire que pour que la suite $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit équirépartie dans $[0,1]$, il suffit que toutes les fonctions continues prenant mêmes valeurs aux extrémités 0 et 1 de l'intervalle $[0,1]$ appartiennent à F_A.

d) Étant donné un entier $N \in \mathbb{N}^*$ et $J = [c,d]$, on considère $N(J) = \operatorname{Card}\{n \in [\![1,N]\!] \mid a_n \in [c,d]\}$. Montrer que (a_n) est équirépartie dans $[0,1]$ ssi pour tout segment $J = [c,d]$, on a $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{N(J)}{N} = d - c$.

II. 1) Un critère complexe d'équirépartition modulo 1.

Pour $R = (r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle et $k, N \in \mathbb{N}^*$, on note $C(R,k,N) \in \mathbb{C}$ la quantité

$$C(R,k,N) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \exp(2i\pi k r_n)$$

Pour des $(c_k)_{-n\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{C}$, ou des $(a_k,b_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{C}$, on appelle polynôme trigonométrique l'application

$$P\colon \theta \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i2\pi k\theta} \quad \text{ou} \quad \theta \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k\cos(2k\pi\theta) + b_k\sin(2k\pi\theta)$$

On admet le théorème d'approximation uniforme trigonométrique de Weierstrass : si $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ est continue et vérifie $f(0) = f(1)$, alors il existe une suite de polynômes trigonométriques P_n telles que $\|f - P_n\|_\infty \to 0$.

a) Montrer que si la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \exp(2i\pi k r_n) = 0.$$

b) Réciproquement, montrer que si ce qui précède est vérifié pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie modulo 1.

c) Soit $\theta, x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(n\theta + x)_{n\in\mathbb{N}^*}$, est équirépartie modulo 1 si et seulement si le réel θ est irrationnel.

2) Inégalité de Van der Corput.

On considère $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, et $h \in [\![1,n]\!]$. Pour $i \notin [\![1,n]\!]$, on utilise la convention $z_i = 0$.

On rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour $(a_i),(b_i) \in \mathbb{C}^n$, $|\sum_{i=1}^n a_i b_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n |b_i|^2}$.

a) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $\displaystyle\left|\sum_{i=1}^{n+h-1}\sum_{j=0}^{h-1} z_{i-j}\right|^2 \leqslant (n+h-1)\sum_{i=1}^{n+h-1}\left|\sum_{j=0}^{h-1} z_{i-j}\right|^2$.

b) En déduire que $\displaystyle h^2\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right|^2 \leqslant (n+h-1)\left[2\sum_{r=1}^{h-1}(h-r)\operatorname{Re}\left(\sum_{i=1}^{n-r} z_i\overline{z_{i+r}}\right) + h\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\right]$.

3) Applications.

a) ★ Soit (x_n) une suite de nombres réels telles que pour tout $p \geqslant 1$, la suite $(x_{n+p} - x_n)$ soit équirépartie modulo 1. En utilisant le critère d'équirépartition modulo 1 et l'inégalité de Van der Corput, montrer que (x_n) est équirépartie modulo 1.

b) En déduire que si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme dont le coefficient dominant est irrationnel, la suite $(P(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1.